ZADANIA OTWARTE

Rozwiązania zadań o numerach od 26. do 34. należy zapisać w wyznaczonych miejscach pod treścią zadania.

Zadanie 26. *(2 pkt)*

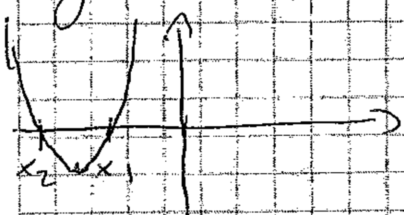
Rozwiąż nierówność $x^2+8x+15>0$.

Wyznaczamy wyróżnik wielomianu $x^2+8x+15$

$\Delta = 8^2 - 4\cdot 15\cdot 1 = 4$

Pierwiastki tego wielomianu to $x_1 = \frac{-8+\sqrt{4}}{2} = -3$ i $x_2 = \frac{-8-\sqrt{4}}{2} = -5$.

Wykres funkcji $f(x) = x^2+8x+15$ przyjmuje postać



Zatem rozwiązaniem nierówności są liczby $x<-5$ i $x>-3$.

Odpowiedź: x spełnia nierówność wtedy i tylko wtedy, gdy $x<-5$ lub $x>-3$.

Zadanie 27. *(2 pkt)*

Uzasadnij, że jeśli liczby rzeczywiste a, b, c spełniają nierówności $0<a<b<c$, to $\frac{a+b+c}{3} > \frac{a+b}{2}$.

Założenia: $a,b,c \in \mathbb{R}$, $0<a<b<c$.

Teza: $\frac{a+b+c}{3} > \frac{a+b}{2}$

Dowód: Mamy $c>b$ i $c>a$. Dodając te nierówności stronami otrzymujemy $2c > a+b$. Dodając do obu stron $2a+2b$ otrzymujemy $2a+2b+2c > 3a+3b$.

Dzieląc tę nierówność stronami przez 6 otrzymujemy

$$\frac{a+b+c}{3} = \frac{2a+2b+2c}{6} > \frac{3a+3b}{6} = \frac{a+b}{2}.$$

To kończy dowód.

Zadanie 28. *(2 pkt)*

Liczby $x_1 = -4$ i $x_2 = 3$ są pierwiastkami wielomianu $W(x) = x^3 + 4x^2 - 9x - 36$. Oblicz trzeci pierwiastek tego wielomianu.

Przekształcamy równanie

$$x^3 + 4x^2 - 9x - 36 = 0$$
$$x^2(x+4) - 9(x+4) = 0$$
$$(x+4)(x^2-9) = 0$$
$$(x+4)(x-3)(x+3) = 0$$

Zatem trzeci pierwiastek jest -3.

Odpowiedź: Trzecim pierwiastkiem jest -3.

Zadanie 29. *(2 pkt)*

Wyznacz równanie symetralnej odcinka o końcach $A = (-2, 2)$ i $B = (2, 10)$.

Środek C odcinka AB ma współrzędne $C = \left(\frac{-2+2}{2}, \frac{2+10}{2}\right) = (0,6)$

Prosta przechodząca przez punkty A i B ma równanie

$$l: \frac{y-2}{x+2} = \frac{10-2}{2-(-2)} = \frac{8}{4} = 2$$
$$y - 2 = 2x + 4$$
$$y = 2x + 6$$

Zatem prosta prostopadła do niej ma równanie

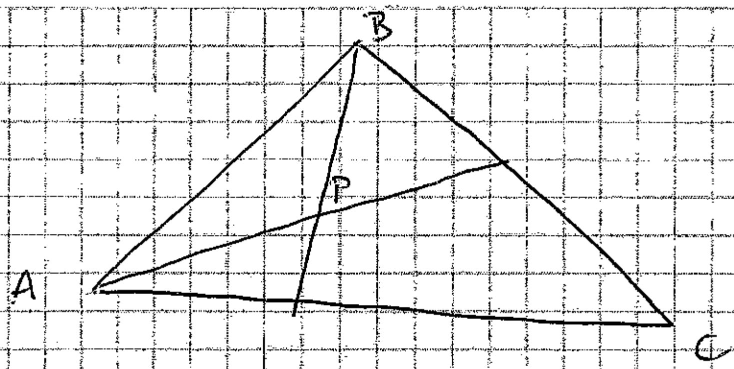
$$y = -\frac{1}{2}x + d \quad \text{dla pewnego } d \in \mathbb{R}.$$

Aby prosta ta była symetralną punkt C musi na niej leżeć, skąd $6 = -\frac{1}{2} \cdot 0 + d$, zatem $d = 6$.

Odpowiedź: Symetralna ma równanie $y = -\frac{1}{2}x + 6$.

Wypełnia egzaminator	Nr zadania	26.	27.	28.	29.
	Maks. liczba pkt	2	2	2	2
	Uzyskana liczba pkt				

Zadanie 30. *(2 pkt)*
W trójkącie ABC poprowadzono dwusieczne kątów A i B. Dwusieczne te przecinają się w punkcie P. Uzasadnij, że kąt APB jest rozwarty.



Z założeń zadania otrzymujemy $|\sphericalangle BAP| = |\sphericalangle PAC| = \frac{1}{2}|\sphericalangle CAB|$
$|\sphericalangle ABP| = |\sphericalangle PBC| = \frac{1}{2}|\sphericalangle CBA|$.

Ponieważ suma kątów w trójkącie daje 180° otrzymujemy

$$|\sphericalangle APB| = 180^\circ - |\sphericalangle PAB| - |\sphericalangle PBA| =$$
$$= 180^\circ - \frac{1}{2}(|\sphericalangle ABC| + |\sphericalangle CAB|) =$$
$$= 180^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - |\sphericalangle ACB|) = 90^\circ + \frac{1}{2}|\sphericalangle ACB| > 90^\circ$$

Zatem kąt APB jest rozwarty.

Zadanie 31. *(2 pkt)*

Ze zbioru liczb $\{1,2,3,4,5,6,7\}$ losujemy dwa razy po jednej liczbie ze zwracaniem. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A, polegającego na wylosowaniu liczb, których iloczyn jest podzielny przez 6.

Wynikiem losowania jest para (a, b) liczb ze zbioru $\{1,2,3,4,5,6,7\}$. Par takich jest $7^2=49$.
Pary sprzyjające zdarzeniu A to: $(2,3), (4,3), (3,2), (3,4), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6), (6,7), (1,6), (2,6), (3,6), (4,6), (5,6), (7,6)$.
Par tych jest 17.
Zatem szukane prawdopodobieństwo wynosi $P(A)=\frac{17}{49}$.

Odpowiedź: Prawdopieństwo zdarzenia A wynosi $17/49$.

Wypełnia egzaminator	Nr zadania	30.	31.
	Maks. liczba pkt	2	2
	Uzyskana liczba pkt		

Zadanie 32. *(4 pkt)*

Ciąg $(9, x, 19)$ jest arytmetyczny, a ciąg $(x, 42, y, z)$ jest geometryczny. Oblicz x, y oraz z.

Skoro ciąg $(9, x, 19)$ jest arytmetyczny, to

$x - 9 = 19 - x$ i zatem $2x = 28$

$x = 14$

Skoro ciąg $(x, 42, y, z)$ jest geometryczny, jego iloraz $q = \frac{42}{x} = \frac{42}{14} = 3$.

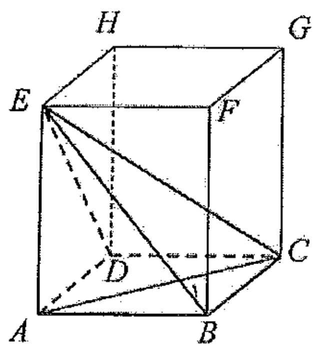
Stąd $y = 42q = 126$

$z = yq = 126 \cdot 3 = 378$

Odpowiedź: $x = 14$, $y = 126$, $z = 378$

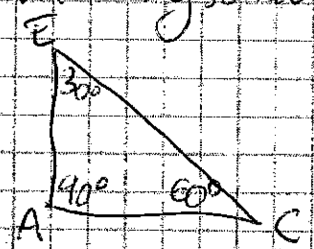
Zadanie 33. *(4 pkt)*

W graniastosłupie prawidłowym czworokątnym *ABCDEFGH* przekątna *AC* podstawy ma długość 4. Kąt *ACE* jest równy 60°. Oblicz objętość ostrosłupa *ABCDE* przedstawionego na poniższym rysunku.



Z warunków zadania wiemy, że czworokąt ABCD jest kwadratem, a krawędź AE tworzy z płaszczyzną podstawy kąt prosty.

Trójkąt AEC ma zatem kąty jak na rysunku poniżej



Zatem $|AE| = |AC| \cdot tg|\sphericalangle ACE| = 4 \cdot \sqrt{3}$

Odcinek AC ma długość 4 i jest przekątną kwadratu ABCD, zatem bok tego kwadratu to

$|AB| = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$

Pole kwadratu ABCD to $P_{ABCD} = |AB|^2 = (2\sqrt{2})^2 = 8$

Objętość ostrosłupa ABCDE to

$V = \frac{1}{3} \cdot |AE| \cdot P_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot 4\sqrt{3} \cdot 8 = \frac{32}{\sqrt{3}} = \frac{32\sqrt{3}}{3}$

Odpowiedź: Objętość ostrosłupa ABCDE wynosi $\frac{32}{\sqrt{3}} = \frac{32\sqrt{3}}{3}$.

Wypełnia egzaminator	Nr zadania	32.	33.
	Maks. liczba pkt	4	4
	Uzyskana liczba pkt		

Zadanie 34. *(5 pkt)*
Miasto A i miasto B łączy linia kolejowa długości 210 km. Średnia prędkość pociągu pospiesznego na tej trasie jest o 24 km/h większa od średniej prędkości pociągu osobowego. Pociąg pospieszny pokonuje tę trasę o 1 godzinę krócej niż pociąg osobowy. Oblicz czas pokonania tej drogi przez pociąg pospieszny.

Niech v oznacza prędkość pociągu osobowego (w km/h). Prędkość pociągu pospiesznego wynosi zatem $v+24$.
Czas potrzebny na przejechanie trasy przez pociąg pospieszny to $\frac{210}{v+24}$, a przez pociąg osobowy $\frac{210}{v}$

Z warunków zadania wiemy, że $\frac{210}{v} - \frac{210}{v+24} = 1$.

Zatem $210v + 210\cdot 24 - 210v = v^2 + 24v$

Przekształcając równanie $v^2 + 24v - 210\cdot 24 = 0$

$(v+12)^2 - 144 - 210\cdot 24 = 0$

$(v+12)^2 = 144 + 210\cdot 24 = 12(12+420) = 4\cdot 3\cdot 3\cdot 144$

Zatem $(v+12)^2 = 72^2$, skąd

$v+12 = 72$ lub $v+12 = -72$

$v = 60$ lub $v = -84$

Drugie z tych rozwiązań eliminujemy, bowiem prędkość pociągu jest liczbą nieujemną.

Zatem $v = 60$.

Czas potrzebny na przejechanie trasy przez pociąg pospieszny to $\frac{210}{60+24} = \frac{210}{84} = \frac{105}{42} = \frac{35}{14} = \frac{5}{2}$ godziny.

Zatem pociąg pospieszny pokonuje trasę w dwie i pół godziny.