## Zadanie 1. *(4 pkt)*

Wyznacz cztery kolejne liczby całkowite takie, że największa z nich jest równa sumie kwadratów trzech pozostałych liczb.

OZNACZMY DRUGĄ Z LICZB PRZEZ $n$.
WTEDY:

$$(n-1)^2+n^2+(n+1)^2 = n+2$$

czyli $3n^2+2=n+2$

więc $n(3n-1)=0$

PONIEWAŻ $n$ CAŁKOWITE, WIĘC $n=0$

I POSZUKIWANYMI LICZBAMI SĄ:

$\boxed{-1,\ 0,\ 1,\ 2}$.

**Zadanie 2.** *(4 pkt)*

Rozwiąż nierówność $x^4+x^2 \geq 2x$.

PRZEKSZTAŁCAMY DANĄ NIERÓWNOŚĆ:

$$x^4+x^2-2x \geq 0$$

$$x(x^3+x-2) \geq 0$$

$$x(x^3-1+x-1) \geq 0$$

$$x\left[(x-1)(x^2+x+1)+(x-1)\right] \geq 0$$

$$x(x-1)(x^2+x+2) \geq 0$$

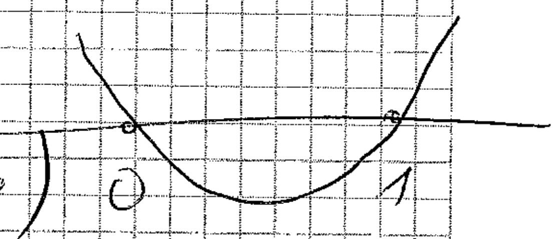
OSTATNIA NIERÓWNOŚĆ JEST RÓWNOWAŻNA WYJŚCIOWEJ.

ALE $x^2+x+2>0$ $(\Delta=-3)$

WIĘC W ISTOCIE WYSTARCZY ROZWIĄZAĆ NIERÓWNOŚĆ $x(x-1) \geq 0$

ZATEM

$x \in (-\infty, 0]$ LUB $x \in [1, \infty)$




Odpowiedź: $x \in (-\infty, 0]$ LUB $x \in [1, \infty)$.

**Zadanie 3.** *(4 pkt)*
Rozwiąż równanie $\cos 2x + 2 = 3\cos x$.

STOSUJEMY WZÓR $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$
PODSTAWIAJĄC $t = \cos x$ OTRZYMUJEMY RÓWNANIE:

$$2t^2 - 3t + 1 = 0$$

$$\Delta = 9 - 8 = 1 \quad \sqrt{\Delta} = 1$$

$$t_1 = \frac{3-1}{4} = \frac{1}{2}, \quad t_2 = \frac{4}{4} = 1$$

STĄD $\cos x = \frac{1}{2}$ LUB $\cos x = 1$
OTRZYMUJEMY WIĘC TRZY SERIE ROZWIĄZAŃ:

$$x_k = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

$$x_k = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{ORAZ}$$

$$x_k = 2k\pi$$

~~$k \in \mathbb{Q}$~~

$k \in (-3, -2, -1, 0, 1, 2 \ldots)$

Odpowiedź: ROZWIĄZANIA SĄ POSTACI: $x_k = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ LUB $x_k = 2k\pi$

| Wypełnia egzaminator | Nr zadania | 2. | 3. |
|---|---|---|---|
| | Maks. liczba pkt | 4 | 4 |
| | Uzyskana liczba pkt | | |

$k$ - LICZBA CAŁKOWITA

**Zadanie 4.** ***(6 pkt)***

Oblicz wszystkie wartości parametru $m$, dla których równanie $x^2-(m+2)x+m+4=0$ ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste $x_1, x_2$ takie, że $x_1^4+x_2^4=4m^3+6m^2-32m+12$.

Równanie $x^2-(m+2)x+m+4=0$ ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste wtedy i tylko wtedy, gdy $\Delta=(m+2)^2-4(m+4)=m^2-12>0$.

Jeśli $x_1, x_2$ są pierwiastkami tego równania, to

$$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=(m+2)^2-2(m+4)=m^2+2m-4$$

(wzory Viète'a) oraz

$$x_1^4+x_2^4=(x_1^2+x_2^2)^2-2x_1^2x_2^2=(m^2+2m-4)^2-2(m+4)^2=$$
$$=m^4+4m^3-8m^2-16m+4m^2+16-2m^2-16m-32=$$
$$=m^4+4m^3-6m^2-32m-16$$

Zatem $x_1^4+x_2^4=4m^3+6m^2-32m+12$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$m^4+4m^3-6m^2-32m-16=4m^3+6m^2-32m+12$$
$$m^4-12m^2-28=0$$
$$(m^2-6)^2-36-28=0$$
$$(m^2-6)^2=64=8^2$$
$$m^2-6=-8 \quad \text{lub} \quad m^2-6=8$$

Pierwsza z tych możliwości daje $m^2=-2$, zatem nie może zachodzić.

Druga z tych możliwości daje $m^2=14$, co daje $m=\pm\sqrt{14}$

Jeśli $m=\pm\sqrt{14}$, to $m^2=14$ i $m^2-12=2>0$, a zatem równanie $x^2-(m+2)x+(m+4)=0$ ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste.

Odpowiedź: $m = \sqrt{14}$ lub $m = -\sqrt{14}$ .

| Wypełnia egzaminator | Nr zadania | 4. |
|---|---|---|
| | Maks. liczba pkt | 6 |
| | Uzyskana liczba pkt | |

**Zadanie 5.** *(6 pkt)*
Trzy liczby tworzą ciąg geometryczny. Jeżeli do drugiej liczby dodamy 8, to ciąg ten zmieni się w arytmetyczny. Jeżeli zaś do ostatniej liczby nowego ciągu arytmetycznego dodamy 64, to tak otrzymany ciąg będzie znów geometryczny. Znajdź te liczby. Uwzględnij wszystkie możliwości.

NIECH POSZUKIWANYMI LICZBAMI BĘDĄ $x, y, z$.
Z WARUNKÓW ZADANIA OTRZYMUJEMY:

$$\begin{cases} y^2 = xz \\ 2(y+8) = x+z \\ (y+8)^2 = x(z+64) \end{cases}$$

Z RÓWNAŃ PIERWSZEGO I TRZECIEGO OTRZYMUJEMY
$y = 4x-4$ ZATEM PO UWZGLĘDNIENIU RÓWNANIA DRUGIEGO OTRZYMUJEMY:

$$z = 7x+8$$

CO PROWADZI DO RÓWNANIA

$$4(x-1)^2 = x(7x+8)$$

KTÓREGO ROZWIĄZANIAMI SĄ

$$x_1 = \frac{4}{9} \quad \text{i} \quad x_2 = 4$$

ZATEM MAMY DWIE TRÓJKI:

$x = \frac{4}{9}$, $y = -\frac{20}{9}$, $z = \frac{100}{9}$ ORAZ $x = 4$, $y = 12$, $z = 36$

ŁATWO SPRAWDZAMY, ŻE POWYŻSZE CIĄGI SPEŁNIAJĄ WARUNKI ZADANIA

## Zadanie 6. *(6 pkt)*

W układzie współrzędnych rozważmy wszystkie punkty $P$ postaci: $P=\left(\frac{1}{2}m+\frac{5}{2},m\right)$, gdzie $m\in\langle -1,7\rangle$. Oblicz najmniejszą i największą wartość $|PQ|^2$, gdzie $Q=\left(\frac{55}{2},0\right)$.

MAMY:

$$|PQ|^2=\left(\frac{55}{2}-\frac{1}{2}m-\frac{5}{2}\right)^2+(0-m)^2=$$

$$=\left(25-\frac{1}{2}m\right)^2+m^2=\frac{5}{4}m^2-25m+625.$$

ZADANIE SPROWADZA SIĘ DO ZBADANIA FUNKCJI $f(m)=\frac{5}{4}m^2-25m+625$ W PRZEDZIALE $\langle -1,7\rangle$

WIERZCHOŁEK TEJ PARABOLI JEST W PUNKCIE O ODCIĘTEJ: $\frac{-(-25)}{2\cdot\frac{5}{4}}=\frac{25}{\frac{5}{2}}=10$

JEST ZATEM POZA PRZEDZIAŁEM $\langle 1,7\rangle$

DALEJ: $f(-1)=\frac{5}{4}+25+625=651\frac{1}{4}$

$$f(7)=\frac{5}{4}\cdot 49-175+625=511\frac{1}{4}$$

**Zadanie 7.** *(3 pkt)*

Udowodnij, że jeżeli $a+b \geq 0$, to prawdziwa jest nierówność $a^3+b^3 \geq a^2b+ab^2$.

Z: $a, b \in \mathbb{R}$ $a+b \geq 0$

T: $a^3+b^3 \geq a^2b+ab^2$

Dowód: Przekształcamy równoważnie nierówność

$a^3+b^3 \geq a^2b+ab^2$

$a^3-a^2b-ab^2+b^3 \geq 0$

$a^2(a-b)-b^2(a-b) \geq 0$

$(a^2-b^2)(a-b) \geq 0$

$(a-b)^2(a+b) \geq 0$

Ta ostatnia nierówność jest prawdziwa, bowiem $a+b \geq 0$ z założenia zadania, $(a-b)^2 \geq 0$ jako kwadrat liczby rzeczywistej, więc ich iloczyn jest nieujemny jako iloczyn liczb nieujemnych.

## Zadanie 8. *(4 pkt)*

Oblicz, ile jest liczb naturalnych ośmiocyfrowych takich, że iloczyn cyfr w ich zapisie dziesiętnym jest równy 12.

Rozkład 12 na czynniki pierwsze przyjmuje postać $12 = 2^2 \cdot 3$.
Aby liczba ośmiocyfrowa miała iloczyn cyfr równy 12 musi zachodzić jedna z trzech rozłącznych możliwości. Jej cyfry to:

A) jedna 6, jedna 2, sześć 1

B) jedna 4, jedna 3, sześć 1

C) jedna 3, dwie 2, pięć 1

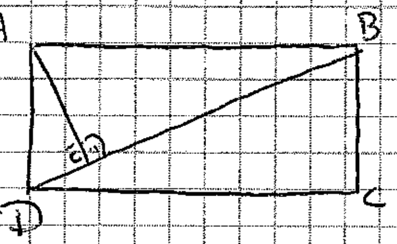
Wyborów liczb spełniających warunki (A) można dokonać na $8 \cdot 7 = 56$ możliwości (8 miejsc w których może być 6 i 7 miejsc na 2)
Wyborów liczb spełniających warunki (B) można dokonać na $8 \cdot 7 = 56$ możliwości.
Wyborów liczb spełniających warunki (C) można dokonać na $8 \cdot \binom{7}{2} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{2} = 168$ możliwości (osiem wyborów miejsca 3, i $\binom{7}{2}$ wyborów miejsc dwójki).
W sumie liczb jest $56 + 56 + 168 = 280$

Odpowiedź: Liczb spełniających warunki zadania jest 280.

| Wypełnia egzaminator | Nr zadania | 7. | 8. |
|---|---|---|---|
| | Maks. liczba pkt | 3 | 4 |
| | Uzyskana liczba pkt | | |

## Zadanie 9. *(5 pkt)*

Dany jest prostokąt $ABCD$, w którym $|AB| = a$, $|BC| = b$ i $a > b$. Odcinek $AE$ jest wysokością trójkąta $DAB$ opuszczoną na jego bok $BD$. Wyraź pole trójkąta $AED$ za pomocą $a$ i $b$.




Niech $h = |AE|$. Pole trójkąta prostokątnego $ABD$ można wyliczyć na dwa sposoby

(*) $$P_{ABD} = \frac{1}{2}|AB||AD| = \frac{1}{2}|AE||BD|$$

Ponieważ $ABCD$ jest prostokątem, $|AD| = |BC| = b$.

Z tw. Pitagorasa zastosowanego do trójkąta $ABD$

$$|BD| = \sqrt{|AB|^2 + |AD|^2} = \sqrt{a^2+b^2}$$

Z równania (*) dostajemy $ab = h\sqrt{a^2+b^2}$ i zatem $h = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Z tw. Pitagorasa zastosowanego do trójkąta $AED$ wyznaczamy

$$|ED|^2 = |AD|^2 - |AE|^2 = b^2 - h^2 = b^2 - \frac{a^2b^2}{a^2+b^2} = \frac{b^4}{a^2+b^2}$$

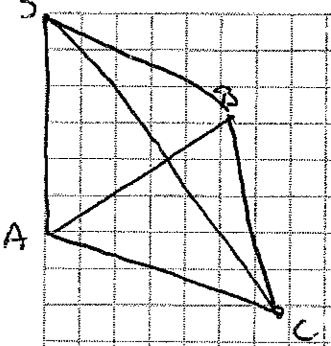
Zatem $|ED| = \frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Wyznaczamy pole trójkąta $AED$ ze wzoru

$$P_{AED} = \frac{1}{2}|AE||ED| = \frac{1}{2}\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{1}{2}\frac{ab^3}{a^2+b^2}.$$

**Zadanie 10.** *(5 pkt)*

Podstawą ostrosłupa $ABCS$ jest trójkąt równoramienny $ABC$. Krawędź $AS$ jest wysokością ostrosłupa oraz $|AS| = 8\sqrt{210}$, $|BS| = 118$, $|CS| = 131$. Oblicz objętość tego ostrosłupa.




Krawędź AS jest wysokością ostrosłupa, zatem jest prostopadła do ~~krawędzi~~, płaszczyzny podstawy. Zatem trójkąty SAC i SAB są prostokątne.

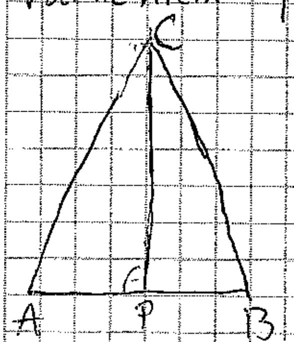
Stosując do tych trójkątów tw. Pitagorasa otrzymujemy

$$|AB|^2 = |BS|^2 - |AS|^2 = 118^2 - (8\sqrt{210})^2 = 484 = 22^2$$

$$|AC|^2 = |BS|^2 - |AS|^2 = 131^2 - (8\sqrt{210})^2 = 3721 = 61^2.$$

Zatem $|AB| = 22$, $|AC| = 61$.

Trójkąt ABC jest równoramienny. Gdyby jego ramieniem było AB to $61 = |AC| < 2|AB| = 44$ (z nierówności trójkąta), co jest jawną sprzecznością. Zatem jego ramieniem jest AC oraz $|AC| = |BC| = 61$




Opuszczamy wysokość z punktu C na bok AB.

Oznaczamy punkt przecięcia przez P

Ponieważ ACB jest trójkątem równoramiennym,

$$|AP| = \frac{1}{2}|AB| = 11.$$

Z tw. Pitagorasa zastosowanego dla trójkąta APC mamy

$$|CP|^2 = |AC|^2 - |AP|^2 = 61^2 - 11^2 = 3600 = 60^2$$

Zatem pole trójkąta ABC wynosi $P_{ABC} = \frac{1}{2}|CP||AB| =$

$$= \frac{1}{2} \cdot 60 \cdot 22 = 660$$

Objętość ostrosłupa ABCS to

$$V_{ABCS} = \frac{1}{3}|AS| P_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot 8\sqrt{210} \cdot 660 = 8 \cdot 220 \cdot \sqrt{210} = 1760\sqrt{210}$$

Odpowiedź: Objętość ostrosłupa ABCS to $1760\sqrt{210}$.

| | | |
|---|---|---|
| **Wypełnia egzaminator** | **Nr zadania** | **10.** |
| | **Maks. liczba pkt** | **5** |
| | **Uzyskana liczba pkt** | |

## Zadanie 11. *(3 pkt)*

Zdarzenia losowe $A$, $B$ są zawarte w $\Omega$ oraz $P(A \cap B') = 0,7$ ($A'$ oznacza zdarzenie przeciwne do zdarzenia $A$, $B'$ oznacza zdarzenie przeciwne do zdarzenia $B$).
Wykaż, że $P(A' \cap B) \leq 0,3$.

Zachodzi: $(A \cap B') \cap (A' \cap B) = \emptyset$, a zatem zdarzenia $A \cap B'$ i $A' \cap B$ wykluczają się.
Zatem $A' \cap B \subseteq \Omega \setminus (A \cap B')$ i

$$P(A' \cap B) \leq P(\Omega \setminus (A \cap B')) = 1 - P(A \cap B') = 1 - 0,7 = 0,3.$$

To kończy dowód.

| Wypełnia egzaminator | Nr zadania | 11. |
|---|---|---|
| | Maks. liczba pkt | 3 |
| | Uzyskana liczba pkt | |