Centralna Komisja Egzaminacyjna

Arkusz zawiera informacje prawnie chronione do momentu rozpoczęcia egzaminu.

WPISUJE ZDAJĄCY

KOD | PESEL

Miejsce na naklejkę z kodem

dysleksja

EGZAMIN MATURALNY Z MATEMATYKI

POZIOM PODSTAWOWY

1. Sprawdź, czy arkusz egzaminacyjny zawiera 18 stron (zadania 1–34). Ewentualny brak zgłoś przewodniczącemu zespołu nadzorującego egzamin.
2. Rozwiązania zadań i odpowiedzi wpisuj w miejscu na to przeznaczonym.
3. Odpowiedzi do zadań zamkniętych (1–25) przenieś na kartę odpowiedzi, zaznaczając je w części karty przeznaczonej dla zdającego. Zamaluj ■ pola do tego przeznaczone. Błędne zaznaczenie otocz kółkiem ■ i zaznacz właściwe.
4. Pamiętaj, że pominięcie argumentacji lub istotnych obliczeń w rozwiązaniu zadania otwartego (26–34) może spowodować, że za to rozwiązanie nie będziesz mógł dostać pełnej liczby punktów.
5. Pisz czytelnie i używaj tylko długopisu lub pióra z czarnym tuszem lub atramentem.
6. Nie używaj korektora, a błędne zapisy wyraźnie przekreśl.
7. Pamiętaj, że zapisy w brudnopisie nie będą oceniane.
8. Możesz korzystać z zestawu wzorów matematycznych, cyrkla i linijki oraz kalkulatora.
9. Na tej stronie oraz na karcie odpowiedzi wpisz swój numer PESEL i przyklej naklejkę z kodem.
10. Nie wpisuj żadnych znaków w części przeznaczonej dla egzaminatora.

MAJ 2012

Czas pracy: 170 minut

Liczba punktów do uzyskania: 50

MMA-P1_1P-122

ZADANIA ZAMKNIĘTE

W zadaniach od 1. do 25. wybierz i zaznacz na karcie odpowiedzi poprawną odpowiedź.

Zadanie 1. ***(1 pkt)***
Cenę nart obniżono o 20%, a po miesiącu nową cenę obniżono o dalsze 30%. W wyniku obu obniżek cena nart zmniejszyła się o

A. 44% **B.** 50% **C.** 56% **D.** 60%

Zadanie 2. ***(1 pkt)***
Liczba $\sqrt[3]{(-8)^{-1}} \cdot 16^{\frac{3}{4}}$ jest równa

A. -8 **B.** -4 **C.** 2 **D.** 4

Zadanie 3. ***(1 pkt)***
Liczba $\left(3-\sqrt{2}\right)^2 + 4\left(2-\sqrt{2}\right)$ jest równa

A. $19-10\sqrt{2}$ **B.** $17-4\sqrt{2}$ **C.** $15+14\sqrt{2}$ **D.** $19+6\sqrt{2}$

Zadanie 4. ***(1 pkt)***
Iloczyn $2 \cdot \log_{\frac{1}{3}} 9$ jest równy

A. -6 **B.** -4 **C.** -1 **D.** 1

Zadanie 5. ***(1 pkt)***
Wskaż liczbę, która spełnia równanie $|3x+1| = 4x$.

A. $x=-1$ **B.** $x=1$ **C.** $x=2$ **D.** $x=-2$

Zadanie 6. ***(1 pkt)***
Liczby x_1, x_2 są różnymi rozwiązaniami równania $2x^2+3x-7=0$. Suma x_1+x_2 jest równa

A. $-\frac{7}{2}$ **B.** $-\frac{7}{4}$ **C.** $-\frac{3}{2}$ **D.** $-\frac{3}{4}$

Zadanie 7. ***(1 pkt)***
Miejscami zerowymi funkcji kwadratowej $y=-3(x-7)(x+2)$ są

A. $x=7,\ x=-2$ **B.** $x=-7,\ x=-2$ **C.** $x=7,\ x=2$ **D.** $x=-7,\ x=2$

Zadanie 8. ***(1 pkt)***
Funkcja liniowa f jest określona wzorem $f(x)=ax+6$, gdzie $a>0$. Wówczas spełniony jest warunek

A. $f(1)>1$ **B.** $f(2)=2$ **C.** $f(3)<3$ **D.** $f(4)=4$

BRUDNOPIS

A (1) $C_1 = (0{,}8 \times C) \times 0{,}7 = 0{,}56\,C$

$C - C_1 = 0{,}44\,C$

B (2) $\sqrt[3]{(-8)^{-1}} \cdot 16^{\frac{3}{4}} = \sqrt[3]{-\frac{1}{8}} \cdot (2^4)^{\frac{3}{4}} =$

$= \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 2^3 = -4$

A (3) $(3-\sqrt{2})^2 + 4(2-\sqrt{2}) = (3^2 - 6\sqrt{2} + 2) + 8 - 4\sqrt{2} =$

$= 11 - 6\sqrt{2} + 8 - 4\sqrt{2} = 19 - 10\sqrt{2}$

A (4) $2 \cdot \log_{\frac{1}{3}} 9 = 2 \cdot (-3) = -6$

$\log_{\frac{1}{3}} 9 = x$

$9 = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

$x = -3$

B (5) $|3x+1| = 4x$ prawdz dla $x = 1$

C (6)

$2x^2 + 3x - 7 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 4 \cdot 2 \cdot (-7) = 9 + 56 = 64$

$\sqrt{\Delta} = 8$

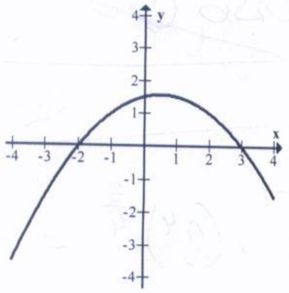
$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3-8}{4} = -\frac{11}{4}$

$x_2 = \frac{-3+8}{4} = \frac{5}{4}$ $\quad x_1 + x_2 = \frac{5-11}{4} = -\frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

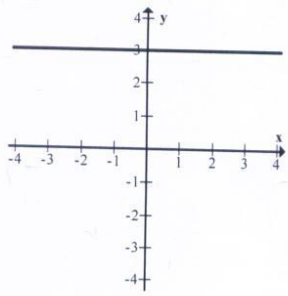
Zadanie 9. ***(1 pkt)***

Wskaż wykres funkcji, która w przedziale $\langle -4, 4\rangle$ ma dokładnie jedno miejsce zerowe.

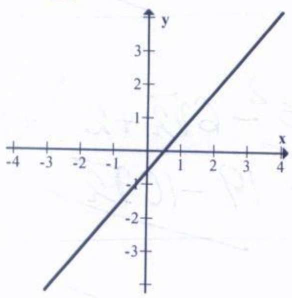
A.



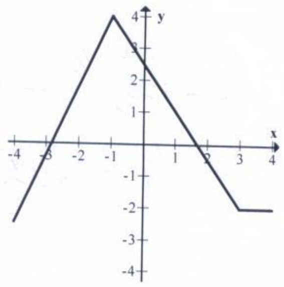
B.



C.



D.



Zadanie 10. ***(1 pkt)***

Liczba $\mathrm{tg}\,30° - \sin 30°$ jest równa

A. $\sqrt{3}-1$ B. $-\frac{\sqrt{3}}{6}$ C. $\frac{\sqrt{3}-1}{6}$ D. $\frac{2\sqrt{3}-3}{6}$

Zadanie 11. ***(1 pkt)***

W trójkącie prostokątnym ABC odcinek AB jest przeciwprostokątną i $|AB| = 13$ oraz $|BC| = 12$. Wówczas sinus kąta ABC jest równy

A. $\frac{12}{13}$ B. $\frac{5}{13}$ C. $\frac{5}{12}$ D. $\frac{13}{12}$

Zadanie 12. ***(1 pkt)***

W trójkącie równoramiennym ABC dane są $|AC| = |BC| = 5$ oraz wysokość $|CD| = 2$. Podstawa AB tego trójkąta ma długość

A. 6 B. $2\sqrt{21}$ C. $2\sqrt{29}$ D. 14

BRUDNOPIS

A 7

$y = -3(x-7)(x+2)$

$x_1 = 7, \quad x_2 = -2$

A 8 $f(x) = ax + b \quad a > 0 \quad \cancel{f(1) > 1}$

C 9

D 10 $tg\,30° - \sin 30° = \frac{\sin 30°}{\cos 30°} - \sin 30° =$

$\sin 30° = \frac{1}{2}$ $\quad = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2} =$

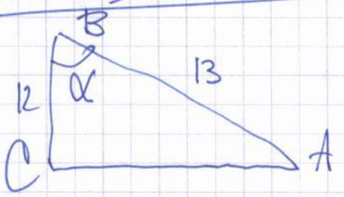
$\sin^2 30° + \cos^2 30° = 1$ $\quad = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} - \frac{2\sqrt{3}}{2}}{2\sqrt{3}} = \frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}-3}{6}$

$\frac{1}{4} + \cos^2 30° = 1$

$\cos^2 30° = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

$\cos 30° > 0 \quad \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

B 11



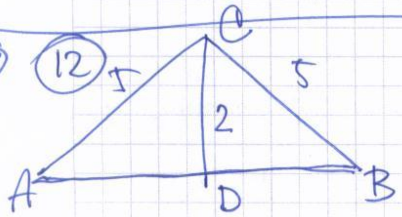
$\sin\alpha = \frac{|AC|}{13} = \frac{5}{13}$

$12^2 + (AC)^2 = 13^2$

$AC^2 = 13^2 - 12^2 = 25$

$|AC| = 5$

B 12



$|DB|^2 + 2^2 = 5^2$

$|DB|^2 = 25 - 4$

$|DB| = \sqrt{21} \quad |AB| = 2|DB| = 2\sqrt{21}$

Zadanie 13. ***(1 pkt)***

W trójkącie prostokątnym dwa dłuższe boki mają długości 5 i 7. Obwód tego trójkąta jest równy

A. $16\sqrt{6}$ B. $14\sqrt{6}$ C. $12+4\sqrt{6}$ D. $12+2\sqrt{6}$

Zadanie 14. ***(1 pkt)***

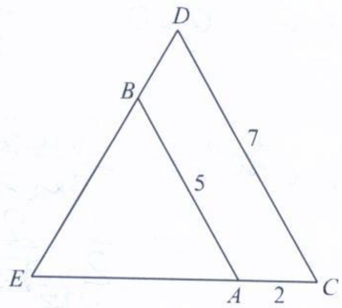
Odcinki AB i CD są równoległe i $|AB|=5$, $|AC|=2$, $|CD|=7$ (zobacz rysunek). Długość odcinka AE jest równa

A. $\frac{10}{7}$

B. $\frac{14}{5}$

C. 3

D. 5



Zadanie 15. ***(1 pkt)***

Pole kwadratu wpisanego w okrąg o promieniu 5 jest równe

A. 25 B. 50 C. 75 D. 100

Zadanie 16. ***(1 pkt)***

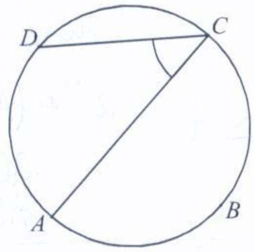
Punkty A, B, C, D dzielą okrąg na 4 równe łuki. Miara zaznaczonego na rysunku kąta wpisanego ACD jest równa

A. 90°

B. 60°

C. 45°

D. 30°



Zadanie 17. ***(1 pkt)***

Miary kątów czworokąta tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy $20°$. Najmniejszy kąt tego czworokąta ma miarę

A. 40° B. 50° C. 60° D. 70°

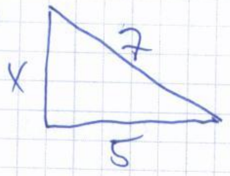
Zadanie 18. ***(1 pkt)***

Dany jest ciąg (a_n) określony wzorem $a_n = (-1)^n \cdot \frac{2-n}{n^2}$ dla $n \geq 1$. Wówczas wyraz a_5 tego ciągu jest równy

A. $-\frac{3}{25}$ B. $\frac{3}{25}$ C. $-\frac{7}{25}$ D. $\frac{7}{25}$

BRUDNOPIS

D 13



$x^2+5^2=7^2$

$x^2+25=49$

$x^2=49-25=24$

$x=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$

Obw. $=2\sqrt{6}+12$

D 14

$\frac{|EA|}{|EA|+2}=\frac{5}{7}$

$7|EA|=5|EA|+10$

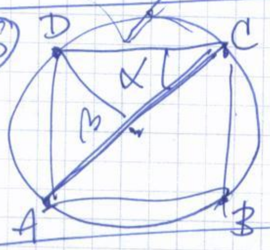
$2|EA|=10$

$|EA|=5$

B 15

$P=\frac{1}{2}10\cdot10=50$

C 16



$\alpha=\frac{1}{2}\beta=45^\circ$

C 17 $\alpha+\beta+\gamma+\delta=360^\circ$

$\alpha+\alpha+20^\circ+\alpha+40^\circ+\alpha+60^\circ=360^\circ$

$4\alpha+120^\circ=360^\circ$

$4\alpha=240^\circ$

$\alpha=60^\circ$

B 18

$a_n=(-1)^n\cdot\frac{2-n}{n^2}$ dla $n>1$

$a_5=(-1)^5\cdot\frac{2-5}{5^2}=(-1)\cdot\frac{-3}{5^2}=\frac{3}{25}$

Zadanie 19. *(1 pkt)*

Pole powierzchni jednej ściany sześcianu jest równe 4. Objętość tego sześcianu jest równa

A. 6 **B.** 8 **C.** 24 **D.** 64

Zadanie 20. *(1 pkt)*

Tworząca stożka ma długość 4 i jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem $45°$. Wysokość tego stożka jest równa

A. $2\sqrt{2}$ **B.** 16π **C.** $4\sqrt{2}$ **D.** 8π

Zadanie 21. *(1 pkt)*

Wskaż równanie prostej równoległej do prostej o równaniu $3x-6y+7=0$.

A. $y=\frac{1}{2}x$ **B.** $y=-\frac{1}{2}x$ **C.** $y=2x$ **D.** $y=-2x$

Zadanie 22. *(1 pkt)*

Punkt A ma współrzędne $(5,2012)$. Punkt B jest symetryczny do punktu A względem osi Ox, a punkt C jest symetryczny do punktu B względem osi Oy. Punkt C ma współrzędne

A. $(-5,-2012)$ **B.** $(-2012,-5)$ **C.** $(-5,2012)$ **D.** $(-2012,5)$

Zadanie 23. *(1 pkt)*

Na okręgu o równaniu $(x-2)^2+(y+7)^2=4$ leży punkt

A. $A=(-2,5)$ **B.** $B=(2,-5)$ **C.** $C=(2,-7)$ **D.** $D=(7,-2)$

Zadanie 24. *(1 pkt)*

Flagę, taką jak pokazano na rysunku, należy zszyć z trzech jednakowej szerokości pasów kolorowej tkaniny. Oba pasy zewnętrzne mają być tego samego koloru, a pas znajdujący się między nimi ma być innego koloru.
Liczba różnych takich flag, które można uszyć, mając do dyspozycji tkaniny w 10 kolorach, jest równa

A. 100 **B.** 99 **C.** 90 **D.** 19

Zadanie 25. *(1 pkt)*

Średnia arytmetyczna cen sześciu akcji na giełdzie jest równa 500 zł. Za pięć z tych akcji zapłacono 2300 zł. Cena szóstej akcji jest równa

A. 400 zł **B.** 500 zł **C.** 600 zł **D.** 700 zł

BRUDNOPIS

(B) ~~(B)~~ (19) ~~(B)~~ (A) (20)

$\frac{h}{4} = \sin 45^\circ$

$2h^2 = 4^2$

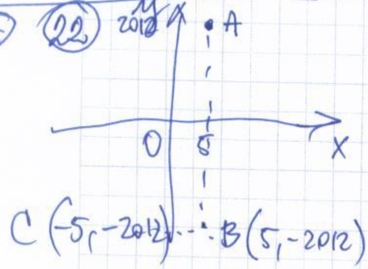
$h^2 = \frac{16}{2} \quad h = \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$

(A) (21) $3x - 6y + 7 = 0$

$3x + 7 = 6y$

$y = \frac{x}{2} + \frac{7}{6}$ wniosek $y = \frac{1}{2}x$

(A) (22)



$C(-5, -2012)$

(B) (23) $(x-2)^2 + (y+7)^2 = 4$

$B = (2, -5)$

(C) (24) 10 kol · 9 kol = 90 wariantów

(D) (25) $a + b + c + d + e = 2300$

$\frac{a+b+c+d+e+x}{6} = 500$

$2300 + x = 3000$

$x = 700$

ZADANIA OTWARTE

Rozwiązania zadań o numerach od 26. do 34. należy zapisać w wyznaczonych miejscach pod treścią zadania.

Zadanie 26. *(2 pkt)*

Rozwiąż nierówność $x^2 + 8x + 15 > 0$.

Rozwiązujemy równanie $x^2+8x+15=0$

$\Delta = b^2-4ac = 64-4 \cdot 15 = -1$

$\Delta < 0$ nie ma rozwiązań

Nierówność jest spełniona dla dowolnego x

Odpowiedź: $x \in \mathbb{R}$

Zadanie 27. *(2 pkt)*

Uzasadnij, że jeśli liczby rzeczywiste a, b, c spełniają nierówności $0 < a < b < c$, to $\frac{a+b+c}{3} > \frac{a+b}{2}$.

$\frac{a+b+c}{3} > \frac{a+b}{2}$ $\quad 2(a+b+c) > 3(a+b)$

$2a+2b+2c > 3a+3b$

$2c > 3a+3b-2a-2b$

$2c > a+b$ co jest prawdziwe

dla $0 < a < b < c$

Zadanie 28. *(2 pkt)*

Liczby $x_1 = -4$ i $x_2 = 3$ są pierwiastkami wielomianu $W(x) = x^3 + 4x^2 - 9x - 36$. Oblicz trzeci pierwiastek tego wielomianu.

Odpowiedź: ....

Zadanie 29. *(2 pkt)*

Wyznacz równanie symetralnej odcinka o końcach $A = (-2, 2)$ i $B = (2, 10)$.

Środek odcinka AB $\left(\frac{-2+2}{2}, \frac{2+10}{2}\right)$ to punkt C

$C\ \left(0, 6\right)$

Równanie prostej przechodzącej przez AB

$(y-2)(2+2) - (10-2)(x+2) = 0$

$4(y-2) - 8(x+2) = 0$

$4y - 8 - 8x - 16 = 0$

$4y = 8x + 24$

$y = 2x + 6$

Prosta prostopadła musi leżeć równoległa do $y = ax$

gdzie $a \cdot 2 = -1$

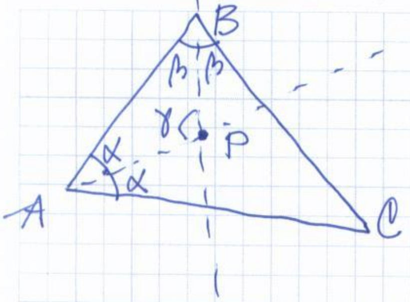
$a = -\frac{1}{2}$

i musi przechodzić przez $C(0,6)$

Odpowiedź: $y = -\frac{1}{2}x + 6$

Wypełnia egzaminator	Nr zadania	26.	27.	28.	29.
	Maks. liczba pkt	2	2	2	2
	Uzyskana liczba pkt				

Zadanie 30. *(2 pkt)*
W trójkącie ABC poprowadzono dwusieczne kątów A i B. Dwusieczne te przecinają się w punkcie P. Uzasadnij, że kąt APB jest rozwarty.



Suma kątów w ABC – $180°$
Szukamy γ
$\alpha+\beta+\gamma = 180°$

ABC tworzą trójkąt, więc suma 2α i $2\beta < 180°$

$$\left.\begin{array}{l}\alpha+\beta+\gamma=180° \\ 2\alpha+2\beta<180 \quad \alpha+\beta<90°\end{array}\right\}$$

$\gamma = 180° - (\alpha+\beta)$
skoro $\alpha+\beta<90°$
$\gamma > 180° - 90°$
$\gamma > 90°$
γ jest kątem rozwartym.
cbdu

Zadanie 31. ***(2 pkt)***

Ze zbioru liczb $\{1,2,3,4,5,6,7\}$ losujemy dwa razy po jednej liczbie ze zwracaniem. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A, polegającego na wylosowaniu liczb, których iloczyn jest podzielny przez 6.

Iloczyn jest podzielny przez 6, gdy jego czynniki są podzielne przez 2, 3 albo 6.
W przypadku zbioru $\{1,2,3,4,5,6,7\}$ takich par jest 14 (2,3) (3,2) (2,6) (6,2) (4,3) (3,4) (4,6) (6,4) (6,1) (1,6) (6,5) (5,6) i dwa razy (6,6).
Ze zbioru siedmiu liczb można (z powtórzeniami) ~~wybrać~~ dwie na $7 \times 7 = 49$ sposobów

$P = \frac{14}{49}$

Odpowiedź: ....

Wypełnia egzaminator	Nr zadania	30.	31.
	Maks. liczba pkt	2	2
	Uzyskana liczba pkt		

Zadanie 32. ***(4 pkt)***

Ciąg $(9, x, 19)$ jest arytmetyczny, a ciąg $(x, 42, y, z)$ jest geometryczny. Oblicz x, y oraz z.

Ciąg arytmetyczny: $x - 9 = 19 - x$

$2x = 28$

$\underline{\underline{x = 14}}$

Ciąg geometryczny: $\frac{42}{x} = q$ q - iloraz ciągu

$q = \frac{42}{14} = 3$

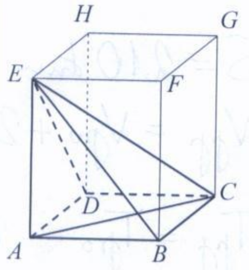
$\frac{y}{42} = q \Rightarrow y = q \cdot 42 = 3 \cdot 42 = \underline{\underline{126 = y}}$

$\frac{z}{126} = q \Rightarrow z = q \cdot 126 = 3 \cdot 126 = \underline{\underline{378 = z}}$

Odpowiedź: $x = 14$, $y = 126$, $z = 378$

Zadanie 33. *(4 pkt)*

W graniastosłupie prawidłowym czworokątnym *ABCDEFGH* przekątna *AC* podstawy ma długość 4. Kąt *ACE* jest równy $60°$. Oblicz objętość ostrosłupa *ABCDE* przedstawionego na poniższym rysunku.



Objętość ostrosłupa:

$$V = \frac{1}{3} P_p \cdot h$$

Podstawa: trójkąt prostokątny o przekątnej $|AC| = 4$

$P_p = \frac{1}{2} a^2$ gdzie $a = |AB| = |BC|$

Liczymy a z tw. Pitagorasa

$a^2 + a^2 = 4^2$

$2a^2 = 4^2$

$a^2 = 8$

$a = 2\sqrt{2}$

$P_p = \frac{1}{2}(2\sqrt{2})^2 = \frac{1}{2} \cdot 8 = 4$

Wysokość liczymy z własności tr. prostokątnego ACE

Kąt $ACE = 60° \rightarrow$ kąt $AEC = 30°$

$\sin 30° = \frac{1}{2} = \frac{|AC|}{|EC|} = \frac{4}{|EC|}$

$|EC| = 8$

$h = |AE|$ $|AE|^2 + |AC|^2 = |EC|^2$

$h^2 = |EC|^2 - |AC|^2 = 64 - 16 = 48$

$h = 4\sqrt{3}$

$$V = \frac{1}{3} P_p \cdot h = \frac{1}{3} 4 \cdot 4\sqrt{3} = \frac{16\sqrt{3}}{3}$$

Odpowiedź: ....

Wypełnia egzaminator	Nr zadania	32.	33.
	Maks. liczba pkt	4	4
	Uzyskana liczba pkt		

Zadanie 34. *(5 pkt)*
Miasto A i miasto B łączy linia kolejowa długości 210 km. Średnia prędkość pociągu pospiesznego na tej trasie jest o 24 km/h większa od średniej prędkości pociągu osobowego. Pociąg pospieszny pokonuje tę trasę o 1 godzinę krócej niż pociąg osobowy. Oblicz czas pokonania tej drogi przez pociąg pospieszny.

V_{pp} = śr. poc. posp.
V_{po} = śr poc osob
S - droga
T_p - czas poc posp
T_o - czas poc osob

$S = 210$ km
$V_{pp} = V_{po} + 24$ km/h
$T_{pp} = T_{po} - 1$ h

Odpowiedź: ....

Wypełnia egzaminator	Nr zadania	34.
	Maks. liczba pkt	5
	Uzyskana liczba pkt	