ZADANIA ZAMKNIĘTE

W zadaniach od 1. do 23. wybierz i zaznacz na karcie odpowiedzi poprawną odpowiedź.

Zadanie 1. *(1 pkt)*
Wskaż nierówność, którą spełnia liczba π.

A. $|x+1|>5$ **B.** $|x-1|<2$ **C.** $\left|x+\frac{2}{3}\right|\le 4$ **D.** $\left|x-\frac{1}{3}\right|\ge 3$

Zadanie 2. *(1 pkt)*
Pierwsza rata, która stanowi 9% ceny roweru, jest równa 189 zł. Rower kosztuje

A. 1701 zł. **B.** 2100 zł. **C.** 1890 zł. **D.** 2091 zł.

Zadanie 3. *(1 pkt)*
Wyrażenie $5a^2-10ab+15a$ jest równe iloczynowi

A. $5a^2(1-10b+3)$ **B.** $5a(a-2b+3)$ **C.** $5a(a-10b+15)$ **D.** $5(a-2b+3)$

Zadanie 4. *(1 pkt)*

Układ równań $\begin{cases}4x+2y=10\\6x+ay=15\end{cases}$ ma nieskończenie wiele rozwiązań, jeśli

A. $a=-1$ **B.** $a=0$ **C.** $a=2$ **D.** $a=3$

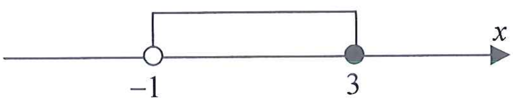
Zadanie 5. *(1 pkt)*
Rozwiązanie równania $x(x+3)-49=x(x-4)$ należy do przedziału

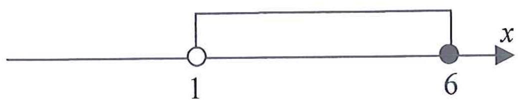
A. $(-\infty,3)$ **B.** $(10,+\infty)$ **C.** $(-5,-1)$ **D.** $(2,+\infty)$

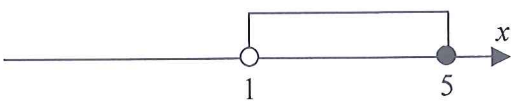
Zadanie 6. *(1 pkt)*
Najmniejszą liczbą całkowitą należącą do zbioru rozwiązań nierówności $\frac{3}{8}+\frac{x}{6}<\frac{5x}{12}$ jest

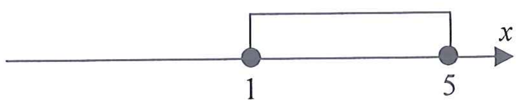
A. 1 **B.** 2 **C.** -1 **D.** -2

Zadanie 7. *(1 pkt)*
Wskaż, który zbiór przedstawiony na osi liczbowej jest zbiorem liczb spełniających jednocześnie następujące nierówności: $3(x-1)(x-5)\le 0$ i $x>1$.

A.


B.


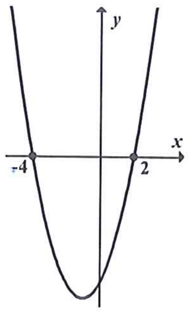
C.


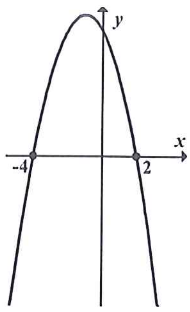
D.


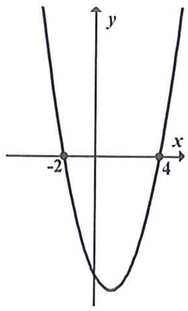
Zadanie 8. *(1 pkt)*
Wyrażenie $\log_4(2x-1)$ jest określone dla wszystkich liczb x spełniających warunek

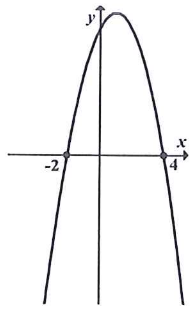
A. $x \le \frac{1}{2}$ **B.** $x > \frac{1}{2}$ **C.** $x \le 0$ **D.** $x > 0$

Zadanie 9. *(1 pkt)*
Dane są funkcje liniowe $f(x) = x - 2$ oraz $g(x) = x + 4$ określone dla wszystkich liczb rzeczywistych x. Wskaż, który z poniższych wykresów jest wykresem funkcji $h(x) = f(x) \cdot g(x)$.

A.


B.


C.


D.


Zadanie 10 *(1 pkt)*
Funkcja liniowa określona jest wzorem $f(x) = -\sqrt{2}x + 4$. Miejscem zerowym tej funkcji jest liczba

A. $-2\sqrt{2}$ **B.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **C.** $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ **D.** $2\sqrt{2}$

Zadanie 11. *(1 pkt)*
Dany jest nieskończony ciąg geometryczny (a_n), w którym $a_3 = 1$ i $a_4 = \frac{2}{3}$. Wtedy

A. $a_1 = \frac{2}{3}$ **B.** $a_1 = \frac{4}{9}$ **C.** $a_1 = \frac{3}{2}$ **D.** $a_1 = \frac{9}{4}$

Zadanie 12. *(1 pkt)*
Dany jest nieskończony rosnący ciąg arytmetyczny (a_n) o wyrazach dodatnich. Wtedy

A. $a_4 + a_7 = a_{10}$ **B.** $a_4 + a_6 = a_3 + a_8$ **C.** $a_2 + a_9 = a_3 + a_8$ **D.** $a_5 + a_7 = 2a_8$

Zadanie 13. *(1 pkt)*
Kąt α jest ostry i $\cos\alpha = \frac{5}{13}$. Wtedy

A. $\sin\alpha = \frac{12}{13}$ oraz $\operatorname{tg}\alpha = \frac{12}{5}$ **B.** $\sin\alpha = \frac{12}{13}$ oraz $\operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{12}$

C. $\sin\alpha = \frac{12}{5}$ oraz $\operatorname{tg}\alpha = \frac{12}{13}$ **D.** $\sin\alpha = \frac{5}{12}$ oraz $\operatorname{tg}\alpha = \frac{12}{13}$

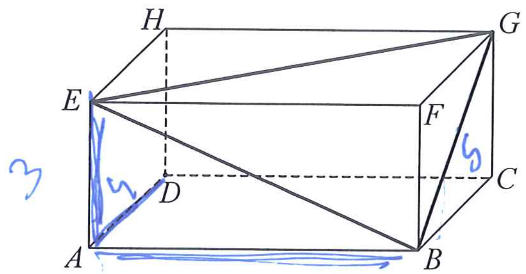
Zadanie 14. *(1 pkt)*

Wartość wyrażenia $\dfrac{\sin^2 38^\circ + \cos^2 38^\circ - 1}{\sin^2 52^\circ + \cos^2 52^\circ + 1}$ jest równa

A. $\frac{1}{2}$ **B.** 0 **C.** $-\frac{1}{2}$ **D.** 1

Zadanie 15. *(1 pkt)*

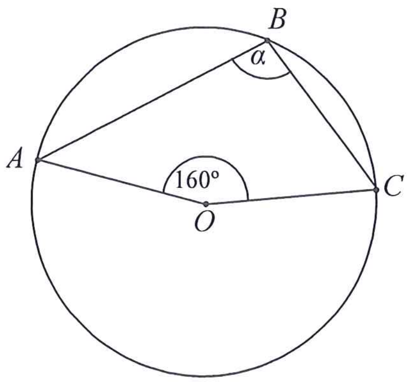
W prostopadłościanie $ABCDEFGH$ mamy: $|AB| = 5$, $|AD| = 4$, $|AE| = 3$. Który z odcinków AB, BG, GE, EB jest najdłuższy?



A. AB **B.** BG **C.** GE **D.** EB

Zadanie 16. *(1 pkt)*

Punkt O jest środkiem okręgu. Kąt wpisany α ma miarę



A. 80° **B.** 100° **C.** 110° **D.** 120°

Zadanie 17. *(1 pkt)*

Wysokość rombu o boku długości 6 i kącie ostrym 60° jest równa

A. $3\sqrt{3}$ **B.** 3 **C.** $6\sqrt{3}$ **D.** 6

Zadanie 18. *(1 pkt)*

Prosta k ma równanie $y = 2x - 3$. Wskaż równanie prostej l równoległej do prostej k i przechodzącej przez punkt D o współrzędnych $(-2, 1)$.

A. $y = -2x + 3$ **B.** $y = 2x + 1$ **C.** $y = 2x + 5$ **D.** $y = -x + 1$

Zadanie 19. *(1 pkt)*

Styczną do okręgu $(x-1)^2+y^2-4=0$ jest prosta o równaniu

A. $x=1$ B. $x=3$ C. $y=0$ D. $y=4$

Zadanie 20. *(1 pkt)*

Pole powierzchni całkowitej sześcianu jest równe 54. Długość przekątnej tego sześcianu jest równa

A. $\sqrt{6}$ B. 3 C. 9 D. $3\sqrt{3}$

Zadanie 21. *(1 pkt)*

Objętość stożka o wysokości 8 i średnicy podstawy 12 jest równa

A. 124π B. 96π C. 64π D. 32π

Zadanie 22. *(1 pkt)*

Rzucamy dwa razy symetryczną sześcienną kostką do gry. Prawdopodobieństwo otrzymania sumy oczek równej trzy wynosi

A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{1}{9}$ C. $\frac{1}{12}$ D. $\frac{1}{18}$

Zadanie 23. *(1 pkt)*

Uczniowie pewnej klasy zostali poproszeni o odpowiedź na pytanie: „Ile osób liczy twoja rodzina?" Wyniki przedstawiono w tabeli:

Liczba osób w rodzinie	liczba uczniów
3	6
4	12
x	2

Średnia liczba osób w rodzinie dla uczniów tej klasy jest równa 4. Wtedy liczba x jest równa

A. 3 B. 4 C. 5 D. 7

ZADANIA OTWARTE

Rozwiązania zadań o numerach od 24. do 33. należy zapisać w wyznaczonych miejscach pod treścią zadania.

Zadanie 24. *(2 pkt)*

Rozwiąż nierówność $3x^2 - 10x + 3 \leq 0$.

$3(x-\frac{1}{3})(x-3) \leq 0$

$x \in \langle \frac{1}{3}, 3 \rangle$

Odpowiedź: ....

Zadanie 25. *(2 pkt)*

Uzasadnij, że jeżeli $a+b=1$ i $a^2+b^2=7$, to $a^4+b^4=31$.

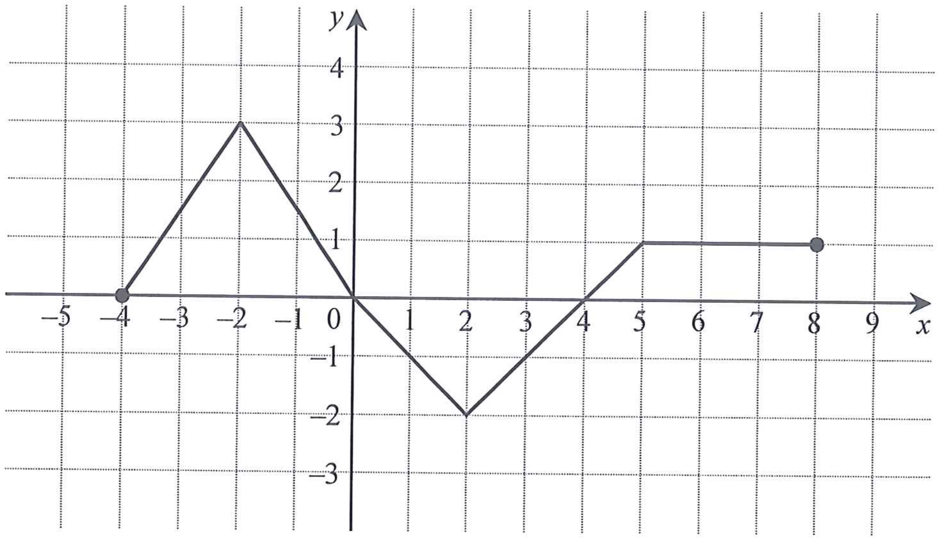
$1 = (a+b)^2 = a^2+b^2+2ab = 7+2ab$

$-3 = ab$

$a^4+b^4 = (a^2+b^2)^2 - 2a^2b^2 = 7^2 - 2\cdot(-3)^2 = 31$

Zadanie 26. *(2 pkt)*

Na rysunku przedstawiono wykres funkcji *f*.



Odczytaj z wykresu i zapisz:

a) zbiór wartości funkcji *f*, $W(f) = [-2, 3]$

b) przedział maksymalnej długości, w którym funkcja f jest malejąca. $[-2, 2]$

Odpowiedź: ....

Wypełnia egzaminator	Nr zadania	24.	25.	26.
	Maks. liczba pkt	2	2	2
	Uzyskana liczba pkt			

Zadanie 27. *(2 pkt)*

Liczby $x, y, 19$ w podanej kolejności tworzą ciąg arytmetyczny, przy czym $x+y=8$. Oblicz x i y.

$y = x + r \rightarrow y = 19 - r$

$19 = x + 2r \Rightarrow x = 19 - 2r$

$8 = x + y = \cancel{\ldots} 19 - 2r + 19 - r$

$8 = 38 - 3r$

$10 = r$

Odpowiedź: ....

Zadanie 28. *(2 pkt)*

Kąt α jest ostry i $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = 2$. Oblicz wartość wyrażenia $\sin\alpha \cdot \cos\alpha$.

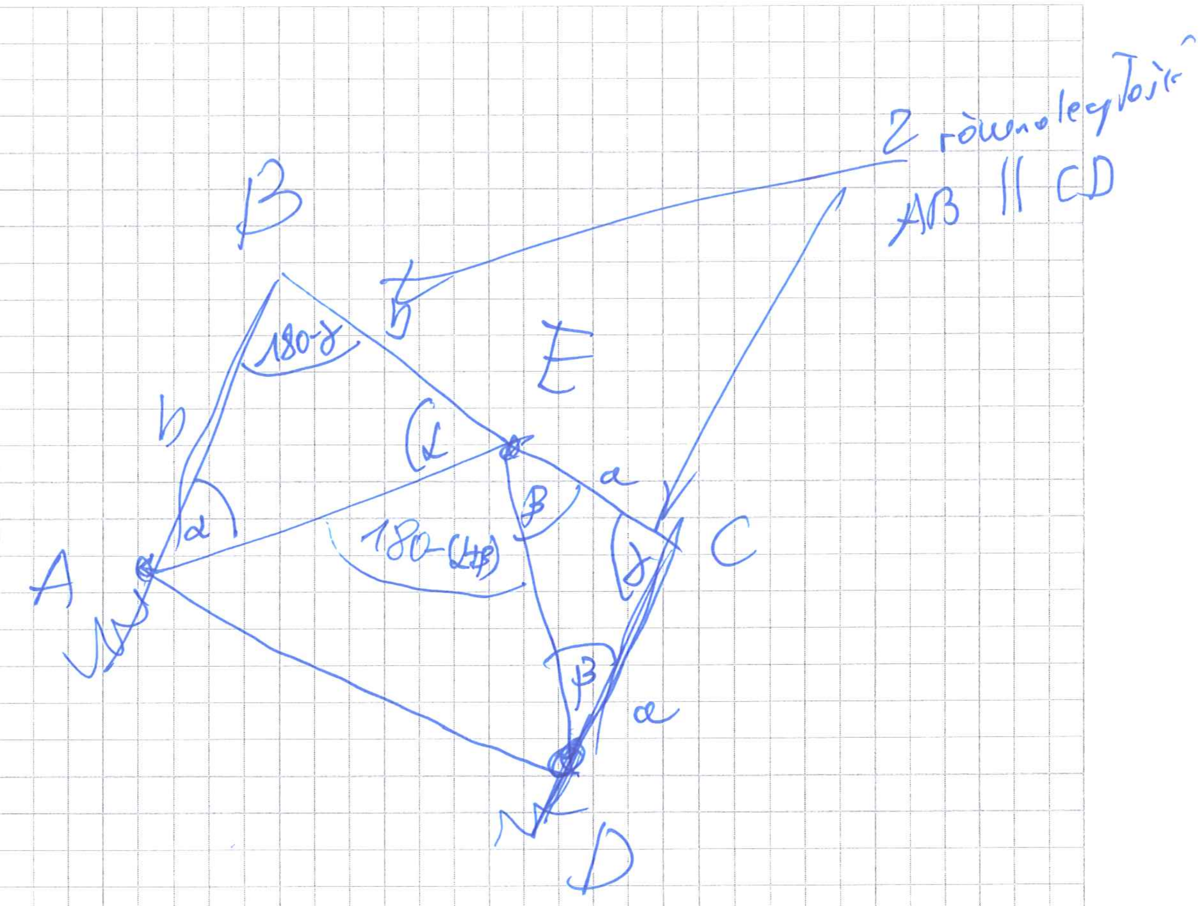
$\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\cos\alpha\sin\alpha} = 2$

$\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}$

Odpowiedź: ....

Zadanie 29. *(2 pkt)*

Dany jest czworokąt *ABCD*, w którym $AB \parallel CD$. Na boku *BC* wybrano taki punkt *E*, że $|EC| = |CD|$ i $|EB| = |BA|$. Wykaż, że kąt *AED* jest prosty.



$z\ \triangle ABE \Rightarrow\ 180-\gamma+2\alpha=180$

$\gamma=2\alpha$

$z\ \triangle ECD \Rightarrow\ \gamma+2\beta=180$

$\Rightarrow$

$2\alpha+2\beta=180^\circ$

$180-(\alpha+\beta)=90^\circ \quad \sphericalangle= \quad \alpha+\beta=90^\circ$

c.b.d.o

Odpowiedź: ....

Wypełnia egzaminator	Nr zadania	27.	28.	29.
	Maks. liczba pkt	2	2	2
	Uzyskana liczba pkt			

Zadanie 30. *(2 pkt)*
Ze zbioru liczb $\{1, 2, 3, ..., 7\}$ losujemy kolejno dwa razy po jednej liczbie ze zwracaniem. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania liczb, których suma jest podzielna przez 3.

$\Omega = \{(i;j) : i,j \in \{1,2,...,7\}\}$

$\overline{\overline{\Omega}} = W_7^2 = 7^2 = 49$

wariacja
z powtórzeniami
2-elem. ze zb. 7-el.

$A = \{(1,2), (2,1), (1,5), (5,1), (2,4), (4,2), (2,7), (7,2), (3,3), (6,6), (4,5), (5,4), (5,7), (7,5), (3,6), (6,3)\}$

$\overline{\overline{A}} = 16$

$p(A) = \frac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}} = \frac{16}{49}$

Odpowiedź: ....

Zadanie 31. *(4 pkt)*
Okrąg o środku w punkcie $S=(3,7)$ jest styczny do prostej o równaniu $y=2x-3$. Oblicz współrzędne punktu styczności.

$(x,y) = A = (pr\ l) \cap (pr\ k)$

spełnia ukł. rów.

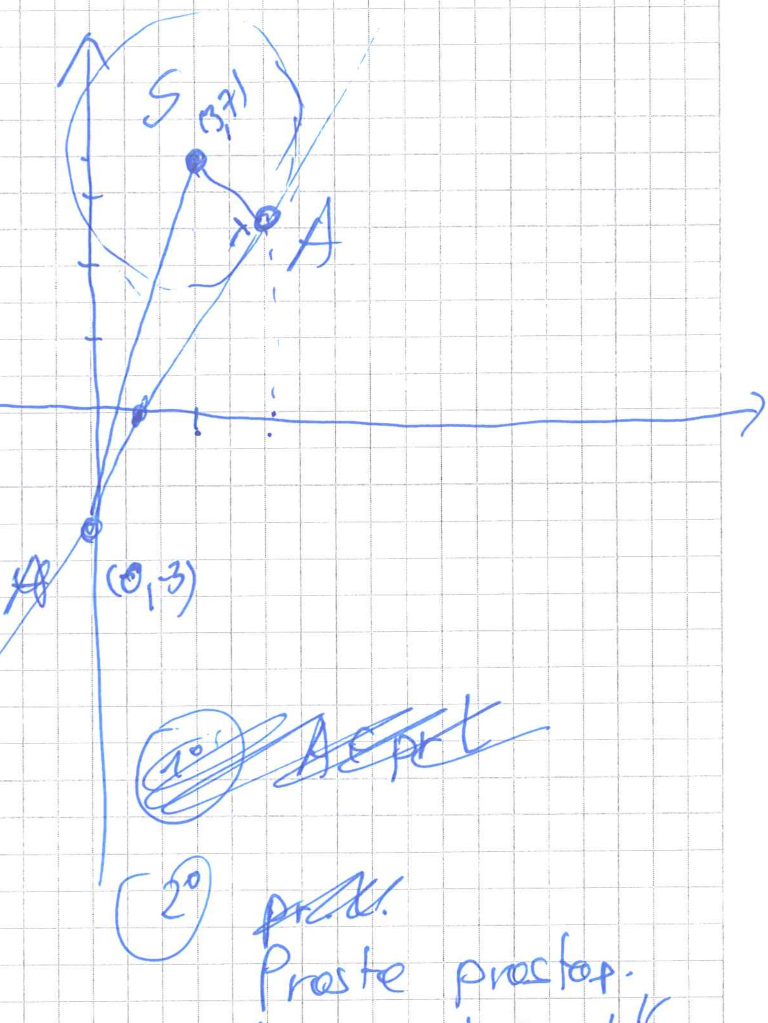
$$\begin{cases} y = 2x-3 \\ y = -\frac{1}{2}x + \frac{17}{2} \quad | \cdot 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2x-3 \\ 4y = -2x+34 \end{cases}$$

+

$5y = 31$

$\boxed{y = \frac{31}{5}}$



1° ~~A ∈ pr l~~

2° ~~pr. k.~~
Proste prostop. do prostej „l" mają postać

k: $y = -\frac{1}{2}x + b$

Punkt S należy do tej pr

tzn. $7 = -\frac{1}{2} \cdot 3 + b$

$\frac{14}{2} + \frac{3}{2} = b$

$b = \frac{17}{2}$

pr l: $y = 2x-3$

$2x = y+3$

$2x = \frac{31}{5} + \frac{15}{5}$

$2x = \frac{46}{5}$

$x = \frac{23}{5}$

Odpowiedź: ....

Odp: $\left(\frac{23}{5}, \frac{31}{5}\right)$

Wypełnia egzaminator	Nr zadania	30.	31.
	Maks. liczba pkt	2	4
	Uzyskana liczba pkt		

Zadanie 32. *(5 pkt)*

Pewien turysta pokonał trasę 112 km, przechodząc każdego dnia tę samą liczbę kilometrów. Gdyby mógł przeznaczyć na tę wędrówkę o 3 dni więcej, to w ciągu każdego dnia mógłby przechodzić o 12 km mniej. Oblicz, ile kilometrów dziennie przechodził ten turysta.

$x = ?$

$k \cdot x = 112$

$(k+3)(x-12) = 112$

$kx + 3x - 12k - 36 = 112$

$3x - 12k = +36$

$\cancel{3x + 36 = 12k}$

$\boxed{x = 4k + 12}$

$k(4k+12) = 112$

$4k^2 + 12k - 112 = 0 \quad | : 4$

$k^2 + 3k - 28 = 0$

$(k+7)(k-4) = 0$

$k > 0$

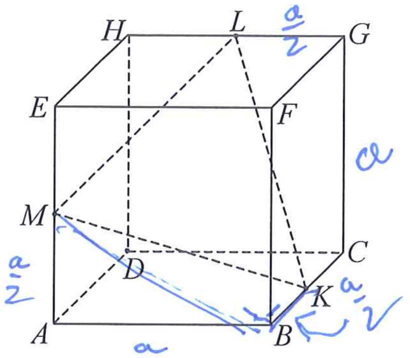
$\boxed{\cancel{k=-7}} \quad \boxed{k = 4}$

$x = \cancel{28}\ \cancel{44}\ 16 + 12 = 28$

$\boxed{x = 28}$

Zadanie 33. *(4 pkt)*

Punkty K, L i M są środkami krawędzi BC, GH i AE sześcianu $ABCDEFGH$ o krawędzi długości 1 (zobacz rysunek). Oblicz pole trójkąta KLM.



$MB = \sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2} = \sqrt{\frac{5}{4}}\,a = \frac{\sqrt{5}}{2}a$

$\triangle MKB$ jest prostokąt.

$MK = \sqrt{(MB)^2 + (BK)^2} =$

$= \sqrt{\frac{5}{4}a^2 + \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{6a^2}{4}} = \frac{\sqrt{6}}{2}a$

$\triangle MLK$ jest równoboczny o boku $b = \frac{\sqrt{6}}{2}a$

Pole trój. równ. $= \frac{b^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\frac{6}{4}a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}\,a^2}{8} =$

$= \frac{3\sqrt{3} \cdot |AB|}{8}$